

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
CONCOURS COMMUN D'ENTRÉE EN 1^{ère} ANNÉE DES ENI
SESSION 2006
SÉRIE STI - ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NOM	PRENOM
DATE DE NAISSANCE	CODE

Ne rien écrire dans ce cadre

Note :

Durée de l'épreuve conseillée : 1 h 30
Les réponses doivent être portées directement
sur ce document

EXERCICE 1 :

1-1-On considère les nombres complexes suivants :

$$z_A = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_C = \frac{z_A^2}{z_B}$$

1-1-1-Écrire z_C sous forme algébrique.

1-1-2-Écrire z_A , z_B et z_C sous forme trigonométrique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARRE

1-1-3-En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

1-2-Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x$$

1-2-1-Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = 4\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$$

1-2-2-Résoudre, l'équation $f(x) = -2\sqrt{3}$ dans l'intervalle $]-\pi; +\pi]$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 2 :

Soit une fonction dérivable f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ae^{-x} + b$$

où a et b sont deux réels.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2cm.

2-1-Déterminer a et b de manière que la courbe \mathcal{C} vérifie les deux conditions :

la courbe \mathcal{C} passe par le point A de coordonnées $(\ln 2, 1)$,

la droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

2-2-Déterminer la primitive G de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 4e^{-2x} - 8e^{-x} + 4$$

telle que : $G(0)=6$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARRÉE

2-3-Soit (S) le domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

Calculer $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$ en cm^3 correspondant au volume du solide engendré par la rotation de (S) autour de l'axe des abscisses.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

* EXERCICE 3 :

: Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$$

où A et B sont des nombres réels.

3-1-Donner une relation simple entre $f(x)$ et $f''(x)$.

3-2-Déterminer A et B sachant que :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARREE

3-3-Écrire $f(x)$ sous la forme $a\sin(\omega x + \varphi)$ où a , ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$, $\omega > 0$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

3-4-Calculer la dérivée de la fonction f , étudier son signe sur $\left[0; +\frac{2\pi}{3}\right]$ et en déduire son sens de variation sur $\left[0; +\frac{2\pi}{3}\right]$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

3-5-Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution et une seule x_0 dans $\left[+\frac{\pi}{12};+\frac{5\pi}{12}\right]$.

3-6-Calculer la valeur moyenne m de f sur $\left[0;+\frac{\pi}{12}\right]$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARRE

EXERCICE 4 :

Pour une fête, les organisateurs souhaitent proposer une loterie. Les tickets sont vendus au prix de 1,5€.

Parmi ces tickets, 400 sont perdants, 60 permettent de gagner 1€, 150 permettent de gagner 1,5€ et n permettent de gagner 4,5€.

Soit X la variable aléatoirement qui à un ticket pris au hasard fait correspondre le gain obtenu.

4-1-Établir la loi de probabilité de X en fonction de n .

4-2-Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n .

4-3-Comment doit-on choisir n pour que le jeu soit à l'avantage des organisateurs de la fête ?

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

5-1-Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote.

5-2-Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{x}{3}$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} de la fonction f .

5-3-Déterminer les coordonnées du point I , point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-4-Déterminer sur $]0;+\infty[$ la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .

5-5-Sur **feuille annexe**, représentant la courbe de la fonction f , tracer la droite \mathcal{D} , placer le point I puis hachurer la partie H du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la droite \mathcal{D} et les droites d'équation $x=\sqrt{e}$ et $x=e$.

5-6-Calculer l'aire \mathcal{A} exprimée en cm^2 de la partie du plan H .

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA PARTIE BARREE

ANNEXE :

