Ne rien écrire dans ce cadre

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

CONCOURS COMMUN D'ENTREE EN 1ère ANNEE DES ENI

SESSION 2005

SERIE STI - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NOM	PRENOM
DATE DE NAISSANCE	CODE

Note :

Durée de l'épreuve conseillée : 1 h 30
Les réponses doivent être portées directement sur ce document

EXERCICE 1 :

On considère le polynôme P de la variable complexe z :

$$P(z) = z^3 - (a^2 - 1)z^2 + (a - 1)z + 8a$$

où a est un entier naturel.

1-1-Déterminer a pour que P admette -2 pour racine.

1-2-Factoriser alors P.

1-3-Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

1-4-On considère les nombres complexes suivants :

$$z_0 = -2, \ z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ \text{ et } \ z_2 = \overline{z_1}$$

1-4-1-Calculer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.

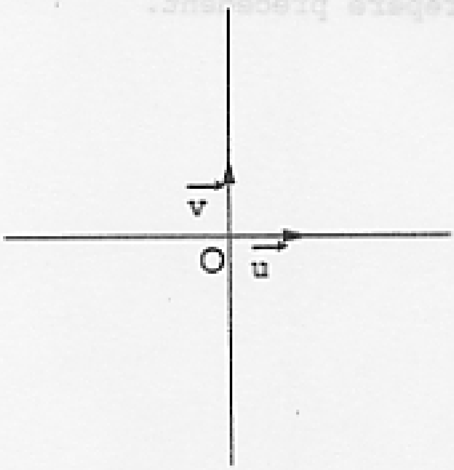
1-4-2-Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\frac{z_1^2}{z_2}, \ z_1^3 z_0 \left(\frac{1}{z_1}\right)^2.$$

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

1-5-Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormal du plan (unité 1cm sur les axes) ;

1-5-1-Représenter, dans ce repère les points M_0, M_1 et M_2 associés respectivement aux nombres complexes z_0, z_1 et z_2.



1-5-2-Calculer les distances M_1M_2, M_0M_2 et M_0M_1. Que peut-on en déduire pour le triangle $M_0M_1M_2$?

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

1-5-3-Déterminer l'ensemble D des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ où x et y sont des réels tel que :

$$|z_0 - z| = |z_2 - z|$$

Construire D dans le repère précédent.

1-5-4-Déterminer l'affixe du point M_3 tel que le quadrilatère $M_0M_1M_2M_3$ soit un parallélogramme. Le placer dans le plan.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\ln(\sin x-\cos x)$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

2-1-Calculer la fonction dérivée f' :

2-2-On pose : $A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}dx$ et $B=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$

2-2-1-Calculer B-A et B+A.

2-2-2-En déduire la valeur de A et celle de B.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 3 :

3-1-Soit l'équation différentielle : $4y''+9y=0$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' la dérivée seconde de y.

3-1-1-Résoudre cette équation différentielle.

3-1-2-Déterminer la solution f de cette équation, telle que : $f(0)=1$ et $f'(0)=-\frac{3}{2}$.

3-1-3-Vérifier que $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

3-2-Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

3-2-1-Calculer $f'(x)$.

3-2-2-Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

3-2-3-Dresser le tableau de variation de f.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

3-2-4-Résoudre $f'(x) = -\frac{3}{2}$ dans $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

3-1-4-Linéariser $\cos^2\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

3-1-5-Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{4\pi}{3}} [f(x)]^2 dx$

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 4 :

Un dé est truqué de telle sorte que les probabilités d'apparition sont proportionnelles aux numéros.

Soit X la variable aléatoire définie par le numéro sorti.

4-1-Définir la loi de probabilité de X.

4-2- Calculer l'espérance mathématique.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 5 :

5-1-Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2 + 4e^{-2x}(1-2x)$$

Étudier le sens de variation de g. En déduire le signe de g(x) pour tout x réel.

5-2- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + 4xe^{-2x}$$

5-2-1-Calculer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-2-2-Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = g(x)$.

5-2-3-En déduire le sens de variation de f. Donner le tableau de variation de f.

5-2-4-Démontrer que la droite D d'équation $y=2x+1$ est une asymptôte à la courbe $\mathscr{C}$ de f.

5-2-5-Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite D.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-2-6-Démontrer que l'équation $2x+1+4xe^{-2x}=0$ possède une solution et une seule α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

5-2-7-Déterminer le signe de f(x) pour tout x réel.

5-2-8-Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse x=2.

5-2-9-Déterminer l'abscisse du point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente en ce point est parallèle à la droite D.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-2-10-Soit la fonction F définie par :

$F(x) = -2xe^{-2x} - e^{-2x}$

Calculer F'(x).

5-2-11-Calculer $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx \quad \alpha < 0$.

5-2-12-Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I$.