Ne rien écrire dans ce cadre

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
CONCOURS COMMUN D'ENTREE EN 1ère ANNEE DES ENI
SESSION 2004
SERIE STI - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NOM	PRENOM
DATE DE NAISSANCE	CODE

Note :

Durée de l'épreuve conseillée : 1 h 30
Les réponses doivent être portées directement sur ce document

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 1 :

Soit la fonction polynôme P définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$$

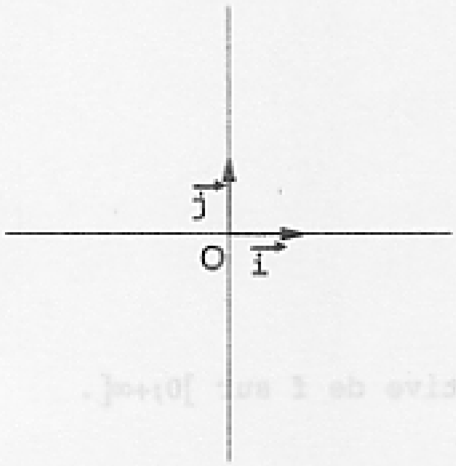
1-1-Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

1-2-Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (On notera z_0 la solution réelle, z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution).

1-3-Calculer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.

1-4-Donner la forme exponentielle du nombre complexe $w = \dfrac{z_0 z_1^2}{z_2^3}$.

1-5-Placer les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On laissera apparents les traits de construction).



1-6-Calculer $|z_2 - z_1|$, $|z_2 - z_0|$ et $|z_1 - z_0|$. Que peut-on en déduire pour le triangle $M_0M_1M_2$?

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^x\left(2e^x-3\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

2-1-Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x :

$$f(x)=\frac{ae^x}{e^x-1}+\frac{be^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

2-2-Déterminer une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2-3-En déduire la valeur exacte de : $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 3 :

Les parties 3-1- et 3-2- sont indépendantes.

3-1-Soit l'équation différentielle : $4y'' + 9y = 0$ (E) où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' la dérivée seconde de y.

3-1-1-Vérifier que la fonction $y(x) = A\cos\frac{3}{2}x + B\sin\frac{3}{2}x$ est solution de l'équation (E). (A et B sont des constantes réelles)

3-1-2-Déterminer la solution particulière f de l'équation (E), c'est-à-dire déterminer A et B, sachant que : $f(0) = -\sqrt{2}$ et $f'(\frac{2\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3-1-3-Écrire f(x) sous la forme : $f(x) = a\cos\left(\frac{3}{2}x + \varphi\right)$ où a est un nombre réel négatif et φ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi;+\pi]$.

3-2-Le plan est muni du repère orthonormal $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par :

$$f(x) = -2\cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

3-2-1-Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;\pi]$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

3-2-2-En déduire le sens de variation de f et établir le tableau de variation de la fonction sur $[0;\pi]$.

3-2-3-Résoudre, pour tout x élément de $[0;\pi]$ l'équation :
$f(x) = -\sqrt{3}$.

EXERCICE 4 :

On lance simultanément trois pièces de monnaie : une de 0,50€, une de 1€ et une de 2€.

Un résultat est noté sous forme de triplet, par exemple (P,P,F) où le premier élément est le résultat pour la pièce de 0,50€, le deuxième le résultat pour la pièce de 1€ et le troisième le résultat pour la pièce de 2€

4-1-Déterminer l'ensemble des tirages possibles.

4-2-On gagne 5€ si on obtient 3 fois face, 2€ si on obtient 2 fois face et on perd 1€ si on obtient une seule fois face ou aucune fois face. On note X la variable aléatoire qui à tout lancer associe le gain obtenu.

Définir la loi de probabilité de cette variable aléatoire ?

4-3-Calculer l'espérance mathématique E(X). Que représente E(X) ?

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE 5 :

5-1-On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 4 + 4\ln x$$

5-1-1-Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

5-1-2-En déduire le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$.

5-1-3-Sachant qu'il existe un nombre α tel que $g(\alpha) = 0$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-2-On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x^2 - \frac{4\ln x}{x}$$

5-2-1-Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

5-2-2-Calculer : $f'(x)$.

5-2-3-En déduire le signe de $f'(x)$, et donner le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

5-2-4-Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

5-2-5-Le plan est muni du repère orthonormal $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 4cm). On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction f tracée en annexe, et $\mathscr{P}$ la courbe représentant la fonction h définie par $h(x)=1+x^2$ sur $]0;+\infty[$.

Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{P}$ sur $]0;+\infty[$.

Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{P}$.

5-2-6-Donner l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.

5-2-7-Tracer la courbe $\mathscr{P}$ et la tangente T dans le repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ (voir annexe).

5-2-8-Hachurer sur le graphique, le domaine limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=t$ avec $t\geq1$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

5-2-9-Calculer l'aire en cm^2 de ce domaine hachuré.

5-2-10-Trouver le réel t, $t \geq 1$ pour que l'aire soit égale à $8cm^2$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

ANNEXE